УДК 519.62

О. В. Онегова

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

1. Введение

Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ), называемые также уравнениями с запаздыванием общего вида, возникают при моделировании многих динамических процессов, развитие которых определяется не только настоящим состоянием процесса, но и его предысторией [1]. В большей части работ, посвященных исследованию ФДУ, в том числе в тех, где разработаны численные методы [2, 3], изучается начальная задача. При исследовании краевых задач даже для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) возникают трудности при решении вопросов существования, единственности решения, его непрерывной зависимости от начальных данных, а также построения эффективных численных методов для отыскания приближенного решения. Важность изучения краевых задач для систем с запаздыванием и дополнительные трудности, возникающие при их рассмотрении, отмечены в обзоре [4]. В настоящее время среди численных методов разработан лишь метод коллокации для уравнений с запаздыванием [5]. Для уравнений вольтеррового типа метод стрельбы изучался в [6].

В данной работе для численного решения краевых задач ФДУ предложен метод, соответствующий методу нелинейной прогонки для ОДУ. Изучены вопросы сходимости этого метода: сам факт сходимости определяется константами Липшица правой части ФДУ. Приведены примеры, иллюстрирующие возможность как сходимости, так и отсутствия сходимости метода нелинейной прогонки. Предложена модификация метода нелинейной прогонки с выделением линейной части для усиления диагонального преобладания в возникающих системах с трехдиагональной матрицей. Этот вариант сходится вне зависимости от констант Липшица. Рассмотрена также методика решения краевых задач методом стрельбы, когда исходная краевая задача сводится к двум начальным задачам, для решения которых применяются численные методы [2], основанные на идее разделения конечномерной и бесконечномерной

*Работа поддержана грантами РФФИ №01-01-00576 и Министерства образования Российской Федерации №E-00-1.0-88.

фазовых составляющих. Эта идея позволяет путем добавления процедуры интерполяции с заданными свойствами адаптировать методы, известные для ОДУ, на случай ФДУ [7].

Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения второго порядка

$$x(t) = f(t, x(t), x_t(\cdot)) \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$x(a) = \alpha, \tag{1.2}$$

$$x(b) = \beta, \tag{1.3}$$

$$x_a(s) = \varphi(s), \ -\tau \leq s < 0. \tag{1.4}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$; $t \in [a, b]$; $x_t(\cdot) = \{x(t+s), \ -\tau \leq s < 0\}$ — функция-предыстория, сложившаяся к моменту t.

Пусть $\varphi(s)$ — непрерывно-дифференцируемая на своей области определения функция. Под решением задачи (1.1)–(1.4) будем понимать функцию $x(t)$, абсолютно-непрерывную на $[a, b]$ вместе со своей производной, при почти всех $t \in [a, b]$ удовлетворяющую уравнению (1.1), а также условиям (1.2)–(1.4). Будем предполагать, что решение этой задачи существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.

Замечание. Вопрос об условиях, гарантирующих существование решения краевой задачи, нетривиален даже для ОДУ (см. [8, 9]). Для ФДУ эти вопросы изучались для более общих классов задач во многих работах (см. [10, 12, 11, 13, 14]). Отметим, что, согласно подходу [10], функциональное краевое условие (1.4) можно включить в уравнение (1.1).

Кроме того, будем предполагать, что функционал $f(t, x, y)$ определен и непрерывен по сдвигу [15] на $[a, b] \times \mathbb{R} \times C[-\tau, 0)$ и удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам: найдутся такие константы L и M, что для всех $t \in [a, b]$, $x^1, x^2 \in \mathbb{R}$, $y^1, y^2 \in C[-\tau, 0)$ выполняется

$$|f(t, x^1, y^1) - f(t, x^2, y^2)| \leq L|x^1 - x^2| + M\|y^1 - y^2\|_C.$$

2. Метод нелинейной прогонки

Выберем на $[a, b]$ конечный набор узлов: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_N = b$, где $t_i = t_0 + hi$; $i = 0, 1, \ldots, N$; $h = \frac{b-a}{N}$. Значения точного решения уравнения (1.1)–(1.4) $x(t)$ в точках t_i обозначим $x_i = x(t_i)$. Требуется найти некоторое приближение (дискретную модель) $u_i = u(t_i)$ в узлах t_i. Обозначим также $X = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N)^t$, $U = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_N)^t \in \mathbb{R}^{N+1}$, где t — знак транспонирования.

Определение 1. *Будем говорить, что модель U сходится при $N \to \infty$ к точному решению X с порядком p, если найдется константа c такая, что*

$$\max_{0 \le i \le N} |u_i - x_i| \le ch^p.$$

От уравнения (1.1) перейдем к его дискретной аппроксимации. Для этого вторую производную заменим разностным отношением

$$\ddot{u}(t_i) \approx \frac{u(t_{i-1}) - 2u(t_i) + u(t_{i+1})}{h^2}, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{2.1}$$

Для вычисления значения функционала f в правой части на приближенном решении необходима интерполяция [3].

Определение 2. *Дискретной предысторией модели в момент t_n назовем множество из $m+1$ чисел $\{u_i\}_n = \{u_i \in R, n-m \le i \le n\}$.*

Определение 3. *Оператором интерполирования I дискретной предыстории модели назовем отображение $I : \{u_i\}_n \to u(\cdot) \in C[t_n - \tau, t_n]$.*

Будем говорить, что оператор интерполяции I липшицев с константой L_I, если для всех наборов предысторий $\{u_i^1\}_n$ и $\{u_i^2\}_n$ выполняется

$$\|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_C \le L_I \max_{n-m \le i \le n} |u_i^1 - u_i^2|,$$

где $v^1(\cdot) = I\{u_i^1\}_n$; $v^2(\cdot) = I\{u_i^2\}_n$. Воспользуемся интерполяцией вырожденными кубическими сплайнами. Оператор интерполяции дискретной предыстории вырожденными сплайнами липшицев [7]. Сгруппируем точки разбиения $t_0, t_1, \ldots, t_N$ в четверки; пусть точка $t_i + s$ принадлежит некоторой четверке $[t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}, t_{k+4}]$ и известны значения $[u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}, u_{k+4}]$. Тогда значение результата интерполяции (непрерывная модель) $u(t_i + s)$ вычисляется по формулам

$$\begin{aligned}
l_1 &= -\frac{(t_i + s - t_{k+2})(t_i + s - t_{k+3})(t_i + s - t_{k+4})}{6h^3}, \\
l_2 &= \frac{(t_i + s - t_{k+1})(t_i + s - t_{k+3})(t_i + s - t_{k+4})}{2h^3}, \\
l_3 &= -\frac{(t_i + s - t_{k+1})(t_i + s - t_{k+2})(t_i + s - t_{k+4})}{2h^3}, \\
l_4 &= \frac{(t_i + s - t_{k+1})(t_i + s - t_{k+2})(t_i + s - t_{k+3})}{6h^3}, \\
u(t_i + s) &= l_1 u_{k+1} + l_2 u_{k+2} + l_3 u_{k+3} + l_4 u_{k+4}, \quad -\tau \le s < 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Таким образом, уравнение (1.1) заменяется системой уравнений

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = h^2 f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \tag{2.3}$$

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \tag{2.4}$$

Система (2.3)–(2.4) является нелинейной. Для ее решения рассмотрим метод нелинейной прогонки. Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_N \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где

$$B_i = h^2 f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot)); \quad i = 1, \dots, N-1; \quad B_0 = \alpha; \quad B_N = \beta.$$

Введем также обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad B(U) = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_N \end{pmatrix},$$

тогда систему (2.5) можно переписать в виде

$$AU = B(U). \tag{2.6}$$

Для нахождения U будем строить последовательность $U^0, U^1, \dots, U^j, \dots$, где $U^j = \left(u_0^j,\ u_1^j,\ u_2^j,\ \dots\ ,\ u_N^j\right)^t$. Пусть начальный вектор U^0 задан в виде линейного приближения:

$$u_i^0 = -\alpha \frac{t_i - t_N}{t_N - t_0} + \beta \frac{t_i - t_0}{t_N - t_0}, \quad i = 0, \dots, N.$$

Тогда вектор $U^j = \left(u_0^j,\ u_1^j,\ u_2^j,\ \dots\ ,\ u_N^j\right)^t$ ищется как решение системы

$$u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j = h^2 f(t_i, u_i^{j-1}, u_{t_i}^{j-1}(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \tag{2.7}$$

$$u_0^j = \alpha, \quad u_N^j = \beta, \tag{2.8}$$

или в матричном виде

$$AU^j = B(U^{j-1}). \tag{2.9}$$

При фиксированном j система (2.9) является линейной с трехдиагональной структурой. Решение системы существует, единственно [16, с. 47] и может быть найдено методом прогонки. Прогоночные коэффициенты λ_i, μ_i находятся рекуррентно по формулам (прямая прогонка)

$$\lambda_{i+1} = \frac{1}{2-\lambda_i}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_{i+1} = \lambda_{i+1}(\mu_i - B_i^{j-1}), \quad \mu_1 = B_0^{j-1}, \tag{2.10}$$

а искомые значения u_i^j — по формулам обратной прогонки

$$u_{i-1}^j = \lambda_i u_i^j + \mu_i, \quad u_N = B_N^{j-1}. \tag{2.11}$$

Выясним условия сходимости метода (2.9) к решению системы (2.6).

Лемма 2.1. *Существует такое число c_1, что $\|A^{-1}\| \le c_1 \frac{1}{h^2}$ при достаточно малом h. Здесь A — матрица системы* (2.6), *$\|A^{-1}\|$ — норма матрицы, подчиненная векторной норме в $\mathbb{R}^{N+1}$, определяемой равенством*

$$\|x\| = \max_{0\le i\le N} |x_i|.$$

Доказательство. Для нахождения матрицы A^{-1} будем решать матричное уравнение

$$AY = E, \tag{2.12}$$

где $Y = A^{-1}$, а E — единичная матрица. Решая его, можно показать, что элементы матрицы $Y = \{y_{ij}\}$ симметричны относительно главной диагонали и определяются по формулам

$$y_{i0} = \frac{N-i}{N}, \qquad y_{iN} = \frac{i}{N},$$

$$y_{ij} = \begin{cases} -\frac{j(N-i)}{N}, & \text{если } j \le i, \\ \\ -\frac{(N-j)i}{N}, & \text{если } i \le j, \end{cases} \qquad \text{при } j \ne 0, N.$$

Сумма модулей элементов j-го столбца при $j \ne 0, N$ равна

$$\sum_{i=1}^{j-1} \frac{i(N-j)}{N} + \sum_{i=j}^{N-1} \frac{j(N-i)}{N} = \frac{j(N-j)}{2}.$$

Максимум этой суммы достигается при $j = \frac{N}{2}$, если N четное, и при $j = \left[\frac{N}{2}\right] \pm 1$, если N нечетное, и равен $\frac{N^2}{8}$ в первом случае и $\frac{N^2-1}{8} < \frac{N^2}{8}$ во втором случае. При $j = 1$ и $j = N$ сумма элементов j-го столбца равна $\frac{N+1}{2}$. Норма матрицы определяется соотношением

$$\|Y\| = \max_{0 \le j \le N} \sum_{i=0}^{N} y_{ij}.$$

При $N < 5$ выполняется $\frac{N+1}{2} > \frac{N^2}{8}$. При $N \ge 5$ выполняется $\frac{N+1}{2} < \frac{N^2}{8}$. Так как $h = \frac{b-a}{N}$, при $h < \frac{b-a}{5}$ справедливо $\|A^{-1}\| \le c_1 \frac{1}{h^2}$, где $c_1 = \frac{(b-a)^2}{8}$.

Теорема 2.1. *Если* $(L + ML_I) < \dfrac{8}{(b-a)^2}$, *то процесс* (2.9) *сходится к решению системы* (2.6).

Доказательство. Рассмотрим процесс (2.9). Оценим разность соседних итераций U^j и U^{j-1}. Имеем $A(U^j) = B(U^{j-1})$ и $A(U^{j+1}) = B(U^j)$, откуда

$$A(U^j - U^{j+1}) = B(U^{j-1}) - B(U^j).$$

Умножим это равенство слева на A^{-1} и вычислим норму разности. Получим

$$\|U^j - U^{j+1}\| \le \|A^{-1}\| \, \|B(U^{j-1}) - B(U^j)\|.$$

Для оценки разности $||B(U^{j-1}) - B(U^j)||$ воспользуемся условием липшицевости функционала f и оператора I, получим

$$\|B(U^{j-1}) - B(U^j)\| = \max_{1 \le i \le N-1} h^2 |f(t_i, u_i^{j-1}, u_{t_i}^{j-1}(\cdot)) - f(t_i, u_i^j, u_{t_i}^j(\cdot))| \le$$
$$\le \max_{1 \le i \le N-1} h^2 (L|u_i^{j-1} - u_i^j| + M\|u_{t_i}^{j-1}(\cdot) - u_{t_i}^j(\cdot)\|_C) \le$$
$$\le \max_{1 \le i \le N-1} h^2 (L|u_i^{j-1} - u_i^j| + ML_I \max_{i-m \le l \le i} |u_l^{j-1} - u_l^j|) \le$$
$$\le h^2 (L + ML_I) \|U^{j-1} - U^j\|.$$

Обозначая $c_1(L + ML_I) = q$, получим при $q < 1$

$$\|A^{-1}\| \, \|B(U^{j-1}) - B(U^j)\| \le h^2 (L + ML_I) \|A^{-1}\| \, \|U^{j-1} - U^j\| \le$$
$$\le c_1 (L + ML_I) \|U^{j-1} - U^j\| = q\|U^{j-1} - U^j\| \le \ \dots \ \le q^j \|U^0 - U^1\| \ \to 0$$

при $j \to \infty$. Следовательно, существует

$$\lim_{j \to \infty} U^j = U.$$

Переходя в (2.9) к пределу при $j \to \infty$ и учитывая непрерывность $B(U)$, вытекающую из непрерывности функционала $f(t, x, y)$ и непрерывности оператора интерполяции, получим $AU = B(U)$, т. е. U – решение системы (2.6).

Теорема 2.2. *Пусть решение задачи* (2.6) *существует и единственно, решение системы* (1.1)–(1.4) *имеет непрерывную четвертую производную и выполняется условие* $L + 24M < \dfrac{8}{(b-a)^2}$. *Тогда метод* (2.6) *имеет второй порядок сходимости.*

Доказательство. Нужно доказать, что существует константа c такая, что

$$\max_{0\le i\le N} |u_i - x_i| \le ch^2.$$

Обозначим $r_i = x_i - u_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. В задаче (1.1)–(1.3) заменим $\ddot{x}(t)$ разностным отношением, тогда получим

$$\frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} x^{IV}(\xi_i) = f(t_i, x_i, x_{t_i}(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \tag{2.13}$$

$$x_0 = \alpha, \qquad x_N = \beta. \tag{2.14}$$

Здесь $\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Из соотношений (2.13), (2.14), (2.3) и (2.4) получим систему для r_i

$$\frac{r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}}{h^2} = \frac{h^2}{12} x^{IV}(\xi_i) + f(t_i, x_i, x_{t_i}(\cdot)) - f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot)),\ i = 1, \dots, N-1,$$

$$r_0 = 0, \qquad r_N = 0,$$

или в векторном виде

$$AR = \Psi, \tag{2.15}$$

где $R = (r_0, r_1, \dots, r_N)^t$, матрица A такая же, что и в (2.6), компоненты вектора $\Psi = (0, \psi_1, \dots, \psi_{N-1}, 0)^t$ определяются соотношением

$$\psi_i = \frac{h^4}{12} x^{IV}(\xi_i) + h^2 f\left(t_i, x_i, x_{t_i}(\cdot)\right) - h^2 f\left(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot)\right), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

По условию на отрезке $[a, b]$ четвертая производная $\|x^{IV}(t)\|$ непрерывна, следовательно, существует константа $M_1 > 0$ такая, что $\|x^{IV}(t)\| < M_1$. Так как функционал $f\left(t, x(t), x_t(\cdot)\right)$ липшицев по второй и третьей переменной,

$$|\psi_i| \le \frac{h^4}{12} M_1 + h^2 (L|r_i| + M \max_{t_i - \tau \le t \le t_i} |x(t) - u(t)|). \tag{2.16}$$

Так как $u(t)$ — результат интерполяции дискретной предыстории вырожденными кубическими сплайнами, то имеет место оценка

$$\max_{t_i - \tau \le t \le t_i} |x(t) - u(t)| \le C_1 \max_{i-m \le j \le i} |x_j - u_j| + C_2 h^4, \tag{2.17}$$

где $C_1 = 4!$, $C_2 = \frac{M_4}{5}$, $M_4 = \max_{[a,b]} |x^{IV}(t)|$ ([2, с. 131; 3, с. 23]). В указанных работах это свойство названо четвертым порядком интерполяции. Оценка (2.16) дает

$$\|\Psi\| \leq h^2(L + MC_1)\|R\| + \frac{h^4}{12}M_1 + h^6 MC_2. \tag{2.18}$$

Из (2.15) и (2.16) получаем

$$\|R\| \leq \|A^{-1}\|h^2\left(L + MC_1\right)\|R\| + \|A^{-1}\|h^2\left(\frac{h^2 M_1}{12} + h^4 MC_2\right). \tag{2.19}$$

Перенесем в левую часть слагаемые с $\|R\|$, тогда

$$\|R\|\left(1 - \|A^{-1}\|h^2(L + MC_1)\right) \leq \|A^{-1}\|h^2\left(\frac{h^2 M_1}{12} + h^4 MC_2\right). \tag{2.20}$$

Используя лемму 2.1, получаем

$$\|R\|\left(1 - \frac{(b-a)^2}{8}(L + MC_1)\right) \leq \frac{(b-a)^2}{8}\left(\frac{h^2 M_1}{12} + h^4 MC_2\right). \tag{2.21}$$

Если $L + MC_1 < \frac{8}{(b-a)^2}$, то $\left(1 - \frac{(b-a)^2}{8}(L + MC_1)\right) > 0$, и при делении на эту величину знак неравенства (2.21) не изменится. Отсюда

$$\|R\| \leq \frac{\frac{(b-a)^2}{8}h^2\left(\frac{M_1}{12} + h^2 MC_2\right)}{\left(1 - \frac{(b-a)^2}{8}(L + MC_1)\right)}, \tag{2.22}$$

т. е. $\max_{0 \leq i \leq N} |u_i - x_i| \leq ch^2$ и метод имеет второй порядок сходимости, что и требовалось доказать.

Заметим, что в данном методе второй порядок сходимости обеспечивает даже менее качественная интерполяция, например кусочно-линейная, имеющая второй порядок интерполяции. В этом случае $C_1 = 2!$ ([2, с. 131; 3, с. 23]).

3. Метод нелинейной прогонки с выделением линейного слагаемого

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) = p(t)x(t) + f(t, x(t), x_t(\cdot)), \tag{3.1}$$

содержащее справа линейную часть относительно $x(t)$ с краевыми условиями (1.2)–(1.4), где $p(t)$ — непрерывная функция, причем $p(t) \geq p > 0$ для $t \in [a, b]$. Заметим, что уравнение (1.1) легко можно привести к виду (3.1) различными способами, например, путем добавления и вычитания слагаемого $p(t)x(t)$:

$$\ddot{x}(t) = p(t)x(t) + \bar{f}(t, x(t), x_t(\cdot)),$$

где $\bar{f}(t, x(t), x_t(\cdot)) = f(t, x(t), x_t(\cdot)) - p(t)x(t)$.

Воспользуемся обозначениями §2, заменим вторую производную в левой части разностным отношением (2.1) и обозначим $p_i = p(t_i)$. Тогда уравнению (3.1) будет соответствовать система

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = p_i u_i \; + \; f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, N-1,$$
$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta,$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -A_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -A_2 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_N \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $B_i = h^2 f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot))$; $A_i = 2 + p_i h^2$; $i = 1, \ldots, N-1$; $B_0 = \alpha$; $B_N = \beta$. Обозначив

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -A_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -A_2 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

можно записать систему (3.2) в виде

$$\hat{A}U = B(U). \tag{3.3}$$

Система (3.3) является нелинейной. Для ее решения воспользуемся методом нелинейной прогонки (подробнее см. §2): для нахождения U строим последовательность $U^0, U^1, \ldots, U^j, \ldots$ при помощи итерационного процесса

$$\hat{A}U^j = B(U^{j-1}). \tag{3.4}$$

При фиксированном j система (3.4) является линейной с трехдиагональной структурой с диагональным преобладанием, так как $(2 + p_i h^2) - 1 - 1 \geq$

$p_i h^2 \geq \geq ph^2 > 0$. Решение системы существует, единственно [16, с. 47] и может быть найдено методом прогонки. Прогоночные коэффициенты λ_i, μ_i находятся рекуррентно по формулам (прямая прогонка)

$$\lambda_{i+1} = \frac{1}{2 + p_i h^2 - \lambda_i}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \mu_{i+1} = \lambda_{i+1}(\mu_i - B_i^{j-1}), \quad \mu_1 = B_0^{j-1}, \tag{3.5}$$

а искомые значения u_i^j — по формулам обратной прогонки

$$u_{i-1}^j = \lambda_i u_i^j + \mu_i, \quad u_N = B_N^{j-1}. \tag{3.6}$$

Выясним условия сходимости метода (3.4) к решению системы (3.3).

Лемма 3.1. *Если система вида*

$$\begin{gathered} \overline{b}_i x_{i-1} + \overline{a}_i x_i + \overline{c}_i x_{i+1} = \overline{q}_i, \ i = 1, \ldots, N-1, \\ x_0 = \alpha, \quad x_N = \beta, \end{gathered}$$

имеет диагональное преобладание, т. е.

$$|\overline{a}_i| - |\overline{b}_i| - |\overline{c}_i| = \overline{\Delta}_i > 0, \ i = 1, \ldots, N-1,$$

то для решения системы выполняется неравенство

$$\max_{0 \leq i \leq N} |x_i| \leq \max_{0 \leq i \leq N} \frac{|\overline{q}_i|}{\overline{\Delta}_i}.$$

Доказательство. Пусть максимум достигается на некотором элементе x_{i_0}. Рассмотрим уравнение $\overline{b_{i_0}} x_{i_0-1} + \overline{a_{i_0}} x_{i_0} + \overline{c_{i_0}} x_{i_0+1} = \overline{q_{i_0}}$. Тогда

$$|\overline{a_{i_0}}||x_{i_0}| = |\overline{q_{i_0}} - \overline{b_{i_0}} x_{i_0-1} - \overline{c_{i_0}} x_{i_0+1}| \leq |\overline{q_{i_0}}| + |\overline{b_{i_0}}||x_{i_0}| + |\overline{c_{i_0}}||x_{i_0}|.$$

Отсюда $|x_{i_0}| \left(|\overline{a_{i_0}}| - |\overline{b_{i_0}}| - |\overline{c_{i_0}}|\right) \leq |\overline{q_{i_0}}|$ и $|x_{i_0}| \leq \frac{|q_{i_0}|}{|\Delta_{i_0}|} \leq \max_{0 \leq i \leq N} \frac{|q_i|}{|\Delta_i|}$, где $\overline{\Delta}_i = |\overline{a}_i| - |\overline{b}_i| - |\overline{c}_i|$.

Теорема 3.1. *Если* $(L + ML_I) < p$, *то процесс* (3.4) *сходится к решению системы* (3.3).

Доказательство. Рассмотрим процесс (3.4). Оценим разность соседних итераций U^j и U^{j-1}. Имеем $\hat{A}(U^j) = B(U^{j-1})$ и $\hat{A}(U^{j+1}) = B(U^j)$. Обозначим $U^{j+1} - U^j = \Delta U^j$, тогда

$$\hat{A} \Delta U^j = B(U^j) - B(U^{j-1}). \tag{3.7}$$

Оценивая ΔU^j, с помощью леммы 3.1 получаем

$$\Delta U^j \le \frac{1}{ph^2}\|B(U^j) - B(U^{j-1})\|.$$

Обозначив $K = L + ML_I$ и воспользовавшись условием липшицевости функционала f и оператора I, оценим разность $\|B(U^j) - B(U^{j-1})\|$:

$$\|B(U^j) - B(U^{j-1})\| \le h^2(L + ML_I)\|U^j - U^{j-1}\| \le h^2 K\|U^j - U^{j-1}\|.$$

Таким образом,

$$\Delta\|U^j\| \le \frac{K}{p}\|U^{j-1}\| \le \ \dots \ \le \left(\frac{K}{p}\right)^j \|U^1\| \to 0$$

при $j \to \infty$ и $\frac{K}{p} < 1$, следовательно, существует $\lim\limits_{j\to\infty} U^j = U$.

Переходя в (3.4) к пределу при $j \to \infty$ и учитывая непрерывность $B(U)$, вытекающую из непрерывности функционала $f(t, x, y)$ и непрерывности оператора интерполяции, получим $\hat{A}U = B(U)$, т. е. U — решение системы (3.3).

Метод (3.3) имеет второй порядок сходимости (доказательство аналогично теореме 2.2). В отличие от метода нелинейной прогонки, описанного в §2, где сходимость зависит от констант Липшица, в методе с выделением линейной части можно добиться сходимости независимо от величины констант за счет выбора достаточно большого p.

4. Метод стрельбы

Заменим исходную краевую задачу (1.1)–(1.4) задачей Коши для уравнения (1.1) с начальными данными

$$x(a) = \alpha, \tag{4.1}$$

$$\dot{x}(a) = \mu, \tag{4.2}$$

$$x_a(s) = \varphi(s), \ -\tau \le s < 0. \tag{4.3}$$

Решение задачи (1.1), (4.1)–(4.3) зависит от параметра μ. Для решения такого рода задач известны численные алгоритмы (см. [17]). Обозначим численную модель решения $u(t, \mu)$, $t \in [a, b]$. Для решения краевой задачи нужно найти такое μ, чтобы выполнялось

$$u(b, \mu) = \beta. \tag{4.4}$$

Предположим, что решение уравнения 4.4 существует и единственно. Уравнение (4.4) относительно неизвестного μ будем решать методом Ньютона, предполагая, что известно достаточно точное приближение μ_0 его корня. По методу Ньютона последовательные итерации корня находятся по формуле

$$\mu_{n+1} = \mu_n - \frac{g(\mu_n)}{g'(\mu_n)}, \tag{4.5}$$

где $g(\mu) = u(b, \mu) - \beta$; $g'(\mu_n) = \frac{\partial u}{\partial \mu}(b, \mu_n)$. Обозначим $w(t) = \frac{\partial u}{\partial \mu}(t, \mu_n)$ при условии существования и непрерывности производной функционала $f(t, x, y)$ по второму аргументу и производной Фреше функционала $f(t, x, y)$ по третьему аргументу. Для отыскания $u(t, \mu_n)$ и $w(t, \mu_n)$ следует решить две задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{u}(t) = f(t, u(t), u_t(\cdot)), \tag{4.6}$$

$$u(a) = \alpha, \quad \dot{u}(a) = \mu_n, \quad u_a(s) = \varphi(s), \ -\tau \le s < 0, \tag{4.7}$$

и

$$\ddot{w}(t) = P(t)w(t) + \langle Q(t), w_t(\cdot)\rangle\,, \tag{4.8}$$

$$w(a) = 0, \quad \dot{w}(a) = 1, \quad w_a(s) \equiv 0, \ -\tau \le s < 0, \tag{4.9}$$

где $P(t) = f'_x(t, u(t), u_t(\cdot))$ — частная производная функционала $f(t, x, y)$ по второму аргументу при подстановке $u(t)$ и $u_t(\cdot)$; $Q(t) = f'_y(t, u(t), u_t(\cdot))$ — производная Фреше функционала $f(t, x, y)$ по третьему аргументу в пространстве $C[-\tau, 0]$ при подстановке $u(t)$ и $u_t(\cdot)$; $\langle Q(t), w_t(\cdot)\rangle$ — результат действия $Q(t)$ на $w_t(\cdot)$.

5. Численные эксперименты

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием:

$$\ddot{x}(t) = (1 + \lambda^2)x - \exp(\lambda)x(t-1);$$
$$x(0) = 1, \ \ x(2) = e^{2\lambda}, \ \ x(s) = e^{\lambda s}, \ \ -1 \le s < 0.$$

Для нахождения решения воспользуемся методом нелинейной прогонки при $N = 10$, методом прогонки с выделением линейной правой части при $N = 10$ и $p = (1 + \lambda^2)$ и методом стрельбы, при котором задача Коши для функционально-дифференциальных уравнений решается методом Рунге–Кутта–Фельберга с автоматическим выбором шага, реализованным в пакете Time-Delay System Toolbox [17].

Результаты экспериментов. При $\lambda = 2$ метод прогонки в варианте 1 не сходится (рис. 1). Можно предположить, что это связано с тем, что константы Липшица достаточно большие. Преобразуем уравнение к виду (3.1), где

$p = 1+\lambda^2$, и воспользуемся методом прогонки с выделением линейного слагаемого. Данный метод сходится к точному решению (рис. 3). На рис. 4 показан метод стрельбы.

При значении $\lambda = 1$ метод прогонки в варианте 1 сходится (рис. 2).

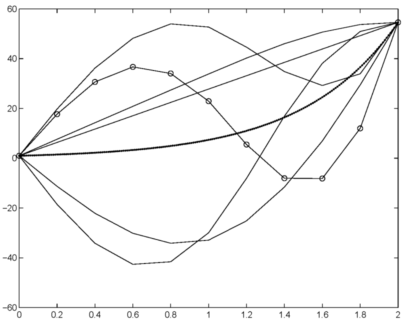

Рис. 1

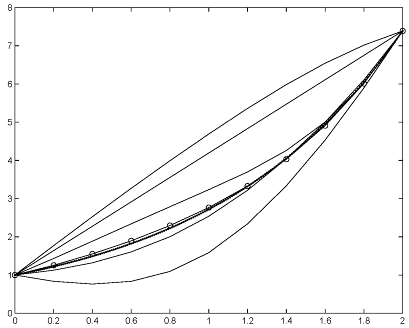

Рис. 2

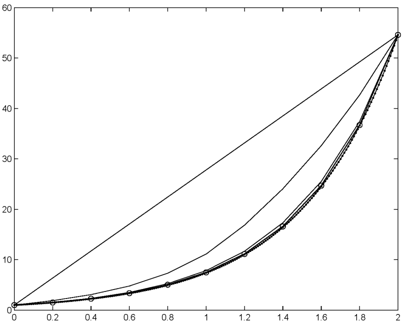

Рис. 3

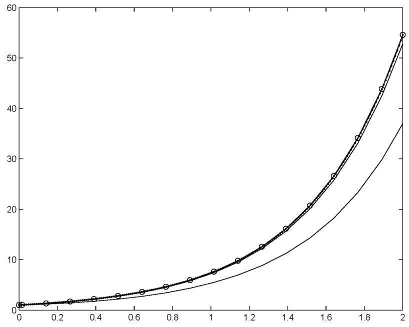

Рис. 4

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения с переменным запаздыванием:

$$\ddot{x}(t) = -2\cos\left(\frac{t}{2}\right) x\left(\frac{t}{2}\right);$$

$$x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad x(s) = \sin(s).$$

Задача решалась методом нелинейной прогонки с выделением линейного слагаемого. Для этого правую часть приводилась к виду $p(t)x(t) + f(t)$, где $p(t) \equiv 1$; $f(t) = -2\cos\left(\frac{t}{2}\right) x\left(\frac{t}{2}\right) - x(t)$. Количество точек разбиения $N = 10$. Метод сходится (рис. 5).

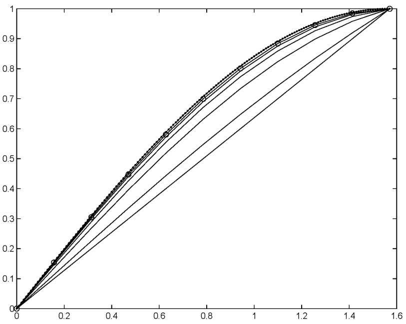

Рис. 5

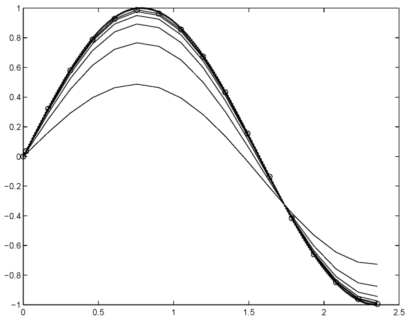

Рис. 6

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием:

$$\ddot{x}(t) = -4x(t) + \int_{-\pi/2}^{0} x(t+s)ds + cos(2t);$$
$$x(0) = 0, \quad x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad x(s) = \sin(2s).$$

Для реализации метода стрельбы необходимо решить две задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений:

$$\ddot{u}(t) = -4u(t) + \int_{-\pi/2}^{0} u(s)ds + cos(2t);$$
$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = \mu, \quad u(s) = \sin(2s),$$

и

$$\ddot{w}(t) = -4w(t) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} w(s)ds;$$
$$w(0) = 0, \quad \dot{w}(0) = 1, \quad \dot{w}(s) \equiv 0.$$

В качестве начального приближения берется значение $\mu_0 = 1$. Метод сходится (рис. 6) так же, как и оба варианта метода нелинейной прогонки.

Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

2. Ким А. В., Пименов В. Г. О применении i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 104–126.

3. Пименов В. Г. Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1998.

4. Мышкис А. Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи математических наук. 1977. Т. 32, вып. 2. С. 173–202.

5. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. Киев: Наук. думка, 1988.

6. Драхлина Н. Ш. Об одном подходе к приближенному решению краевых задач для ФДУ // Краевые задачи. Пермь: ППИ, 1984. С. 73–76.

7. Пименов В. Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, №1. С. 105–114.

8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

9. Лепин А. Я., Лепин Л. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Рига: Зинатне, 1988.

10. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

11. Брыкалов С. А. Априорные оценки и разрешимость задач с нелинейными функциональными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, №7. С. 874–881.

12. Брыкалов С. А. Разрешимость задач с монотонными краевыми условиями // Там же. 1993. Т. 29, №5. С. 744–750.

13. Пужа Б. О некоторых краевых задачах для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Там же. 2001. Т. 37, №6. С. 761–770.

14. Ntouyas S. K., Tsamatos P. Ch. On the solvability of boundary value problem for a second order differential equation with detiating arguments // Commun. Appl. Anal. 1997. Vol. 1, №4. P. 525–538.

15. Ким А. В. i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.

16. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989.

17. Han S.H., Kang J.W., Kim A.V. et al. Time-Delay System Toolbox (for MATLAB). User's guide (Beta version). Seoul: Seoul National University, 1998.

Статья поступила 04.10.2001 г.
Окончательный вариант 13.12.2001 г.